THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

PROBLEMS PROPOSED BY HUNGARY.

H1 Die folgende Behauptung ist zu beweisen:

Nimmt ein Polinom $f/x/$ mit reellen Koeffizienten nur nicht-negative Werte auf, dann gibt es eine positive ganze Zahl n und Polinome $g_1/x/, g_2/x/, \ldots, g_n/x/$ so, daß es gilt:

$$f/x/ = [g_1/x/]^2 + [g_2/x/]^2 + \ldots + [g_n/x/]^2.$$

H2 Eine Wüstenexpedition muß den folgenden Auftrag besorgen:

Sie muß 1 Liter Trinkwasser aus einem Lager, das sich am Rande der Wüste befindet, einem Bestimmungsort zuführen lassen, der vom Lager n Tage entfernt ist, u. zw. mit den unten benannten Bedingungen:

a/ Die Mitglieder der Expedition können je gleichzeitig höchstens 3 Liter Trinkwasser mitnehmen.

b/ Jedes Expeditionsmitglied muß jeden Tag, den er in der Wüste verbringt, ein Liter Wasser trinken.

c/ Nach der Besorgung des Auftrags müssen alle Expeditionsmitglieder ins Lager wieder zurückkehren.

Wieviel Trinkwasser muß wenigstens im Lager vorgelegen sein, damit der Auftrag besorgt werden kann?

H3 Das Polinom $P/x/$ hat höchstens den Grad $2k$. Es ist bekannt, daß für jede ganze Zahl i, die die Ungleichung $-k \leqq i \leqq k$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots$ befriedigt, auch die Beziehung $|P/i/| \leq 1$ erfüllt.

Es ist zu beweisen, daß dann für alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung $-k \leqq x \leqq k$ befriedigen, die folgende Ungleichung gilt:

$$|P/x/| < /2k + 1/ \binom{2k}{k}.$$

H4 Die folgende Behauptung ist zu beweisen:

Es existiert keine Pyramide mit quadratförmiger Grundfläche und vier kongruenten Seitenflächen, für welche sämtliche Kanten, der ganze Flächeninhalt und der Rauminhalt je eine ganze Maßzahl besitzen.

H5 Es seien ein Polinom genau zweiten Grades: $g/x/ = ax^2 + bx + c$, und eine ganze Zahl $n \geqq 1$ gegeben.

Es ist zu beweisen, daß es höchstens ein Polinom genau n-ten Grades $f/x/$ existiert so, daß $f/g/x// = g/f/x//$ gilt.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141