MEĐUNARODNO MATEMATIČKO TAKMIČENJE

U MERŠU, LUKSEMBURG

Prvi dan

1. Naći sve funkcije $f:Q \rightarrow Q$ koje zadovoljavaju sledeća dva uslova:

(i) $f(1) = 2$;

(ii) $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$, za sve x,y iz Q.

(Q je skup racionalnih brojeva.)

2. Neka su A, B, C tri kolinearne tačke, takve da je B između A i C. Sa iste strane prave AC konstruisana su tri polukruga nad AB, BC i AC kao nad prečnicima. Zajednička tangenta prva dva polukruga u tački B seče treći polukrug u tački E. Neka su U i V tačke u kojima zajednička spoljašnja tangenta dodiruje prva dva polukruga. Izraziti odnos

$$\frac{\text{površina trougla } EUV}{\text{površina trougla } EAC}$$

u funkciji od $r_1 = \frac{1}{2}AB$ i $r_2 = \frac{1}{2}BC$.

3. Neka je p prost i n pozitivan ceo broj. Dokazati da su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:

(i) Nijedan od binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}$, $k = 0,1,\ldots,n$, nije deljiv sa p.

(ii) n se može predstaviti u obliku $n = p^s q - 1$, gde su s i q celi brojevi, $s \geq 0$, $0 < q < p$.

10. juli 1980. Vreme za rad 4 časa

MEĐUNARODNO MATEMATIČKO TAKMIČENJE

U MERŠU, LUKSEMBURG

Drugi dan

4. Dva kruga se dodiruju (iznutra ili spolja) u tački P. Prava t dodiruje jedan od tih krugova u tački A, a seče drugi u tačkama B i C. Dokazati da je prava PA simetrala jednog od uglova između pravih PB i PC.

5. Deset igrača počeli su igru, svaki sa istom sumom novca. Jedan za drugim, svaki od njih bacao je pet kockica. Posle svakog bacanja, igrač koji je bacao kockice isplatio je svakom od svojih devet protivnika sumu jednaku n-tom delu sume koju je taj protivnik imao do tog trenutka, gde je n zbir brojeva koje su pokazale kockice. Kada je poslednji, deseti, igrač bacio kockice, zbir brojeva na njima iznosio je 12, a pošto je izvršeno isplaćivanje, pokazalo se da svaki igrač ima istu sumu novca kao na početku igre.

Odrediti, ako je moguće, zbirove koje su pokazivale kockice u prethodnih devet bacanja.

6. Odrediti sve parove (x,y) celih brojeva koji zadovoljavaju jednačinu

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

11. juli 1980. Vreme za rad 4 časa