COMPETITION INTERNATIONALE DE MATHEMATIQUES
à MERSCH (LUXEMBOURG)

Premier jour: jeudi, le 10 juillet 1980

Durée : 4 heures.

(1) Trouver toutes les fonctions f de Q dans Q satisfaisant les deux conditions suivantes:

(i) $f(1) = 2$

(ii) $f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$

pour tout x,y appartenant à Q.

[Q est l'ensemble des nombres rationnels.]

(2) Soient trois points alignés A,B,C avec B situé entre A et C. D'un même côté de AC on décrit les trois demi-cercles de diamètres AB, BC et AC. La tangente commune en B aux deux premiers demi-cercles rencontre le troisième en E. Soient U et V les points de contact de la tangente commune extérieure menée aux deux premiers demi-cercles.

Calculer le rapport

$$\frac{\text{aire du triangle EUV}}{\text{aire du triangle EAC}}$$

en fonction de $r_1 = \frac{AB}{2}$ et $r_2 = \frac{BC}{2}$.

(3) Soit p un nombre premier et n un entier positif. Démontrer que les propositions suivantes (i) et (ii) sont équivalentes:

(i) Aucun des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ (pour $k = 0,1,\ldots,n$) n'est divisible par p.

(ii) n peut être mis sous la forme $n = p^s q - 1$ où s et q sont des entiers, $s \geqslant 0$, $0 < q < p$.

COMPETITION INTERNATIONALE DE MATHEMATIQUES
à MERSCH (LUXEMBOURG)

Deuxième jour: vendredi, le 11 juillet 1980

Durée : 4 heures.

(4) Deux cercles sont tangents (intérieurement ou extérieurement) en un point P. Une droite tangente en A à l'un des cercles coupe l'autre cercle en B et C.
Démontrer que la droite PA est bissectrice d'un des angles des droites PB et PC.

(5) Dix joueurs ont commencé à jouer avec chacun la même somme d'argent. Chacun, tour à tour, a jeté 5 dés. A chaque étape, le joueur qui a jeté les dés a payé à chacun de ses neuf adversaires $\frac{1}{n}$ fois la somme que cet adversaire possédait à ce moment, n étant le total des points indiqués par les 5 dés. Ils ont jeté et payé l'un après l'autre.
Au dixième jet, les dés indiquaient un total de 12 et, après paiement, chaque joueur possédait exactement la même somme qu'au début du jeu.
Déterminer (si possible) les totaux indiqués par les dés dans les neuf parties précédentes.

(6) Déterminer tous les couples d'entiers (x,y) satisfaisant l'équation

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$