THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

PROBLEMS PROPOSED BY THE GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC.

GDR1

Es seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geqq 2)$ reelle Zahlen mit $x_i \geqq \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ und mit $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$.

Man untersuche, ob das Produkt

$$P = x_1 x_2 \dots x_n$$

einen größten bzw. kleinsten Wert annimmt und gebe bejahendenfalls diese Werte an.

GDR2

Sei M eine ebene Punktmenge aus mindestens zwei Elementen. Man beweise: Falls M zwei Symmetrieachsen g_1 und g_2 besitzt, die sich unter einem Winkel $\alpha = q \cdot \pi$ schneiden, wobei q eine irrationale Zahl ist, so enthält M unendlich viele Punkte.

GDR3

R sei eine Menge von genau 6 Elementen. Eine Menge F von Teilmengen von R wird S-Familie über R genau dann genannt, wenn sie die 3 Bedingungen,

(1) Für keine 2 Mengen X,Y aus F gilt: $X \subseteq Y$,

(2) Für je 3 Mengen X,Y,Z aus F gilt: $X \cup Y \cup Z \neq R$,

(3) Es gilt: $\bigcup_{X \in F} X = R$,

erfüllt. $|F|$ bezeichne die Anzahl der Elemente von F (d.h. Teilmengen von R, die in F enthalten sind). Man bestimme (falls existent) $n = \max|F|$, wobei das Maximum über alle S-Familien über R genommen wird.

GDR4

Seien $n, k \geqslant 1$ natürliche Zahlen. Man bestimme die Anzahl $A(n,k)$ der Lösungen in ganzen Zahlen der Gleichung

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_k| = n$$