THE XXI. INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

PROBLEMS PROPOSED BY THE FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY.

FRG1

Es sei

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}=\frac{p}{q},$$

wo p und q teilerfremde natürliche Zahlen sind. Zeige, daß p durch 1979 teilbar ist.

FRG2

Es sei n eine natürliche Zahl. Wenn 4^n+2^n+1 eine Primzahl ist, dann ist n eine Dreierpotenz.

FRG3

Die Funktion f ist für alle rationalen x aus $0\leq x<1$ definiert durch

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\cdot f(2x) & \text{für } 0\leq x<\frac{1}{2}\\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot f(2x-1) & \text{für } \frac{1}{2}\leq x<1\end{cases}$$

Es sei $x=0,b_1b_2b_3\dots$ die binäre Darstellung von x. Bestimme f(x).

FRG4

S und F seien zwei Gegenecken eines regulären 8-Ecks. Ein Stein startet in S und wird jede Sekunde nach einer der beiden Nachbarecken gezogen. Die Zugrichtung wird durch Münzenwurf entschieden. Das Spiel endet, wenn der Stein in F ankommt. Es sei a_n die Anzahl der Spiele mit der Dauer n. Zeige, daß für n=1,2,3,... gilt

$$a_{2n-1}=0,\quad a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),\quad x=2+\sqrt{2},\quad y=2-\sqrt{2}$$