THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

PROBLEMS PROPOSED BY FRANCE

F1 Soit E l'ensemble des applications bijectives f de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad f(t) + f^{-1}(t) = 2t$$

f^{-1} désignant l'application réciproque de f.

Trouver les élements de E qui sont des applications monotones.

F2 Dans le plan affine euclidien on considère deux quadrilatères $ABCD$ et $A'B'C'D'$ vérifiant : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$ et $DA = D'A'$.

Montrer que deux cas et deux seulement sont possibles :

i) La diagonale BD perpendiculaire à la diagonale AC et alors la diagonale $B'D'$ est perpendiculaire à la diagonale $A'C'$;

ii) la médiatrice de BD coupe AC en M, celle de $B'D'$ coupe $A'C'$ en M' et l'on a : $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{M'A'}}{\overline{M'C'}}$ (si $\overline{MC} = 0$ alors $\overline{M'C'} = 0$).

F3 On considère l'ensemble E constitue des couples d'entiers (a,b), $a \geq 1$ et $b \geq 1$, vérifiant dans le système decimal :

i) b a une écriture de trois chiffres $\overline{\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$, $\alpha_2 \neq 0$;

ii) a a une écriture de la forme $\overline{\beta_p \ldots \beta_1\beta_0}$, p quelconque;

iii) $(a+b)^2$ s'écrit : $\overline{\beta_p \ldots \beta_1\beta_0\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$.

Trouver les élements de E.

F4 Soient a et b deux entiers au moins égaux a 1, premiers entre eux. Montrer que tout entier n au moins égal à $(a-1)(b-1)$ s'écrit sous la forme :

$$n = u\,a + v\,b \quad \text{avec } (u,v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141