THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Ponedeljak, 2. juli 1979. godine

vreme rada: 4 sata

(1) Neka su p i q prirodni brojevi takvi da je

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Dokazati da je broj p deljiv brojem 1979.

(2) Data je petougaona prizma sa osnovama $A_1A_2A_3A_4A_5$ i $B_1B_2B_3B_4B_5$. Sve ivice osnova i sve duži A_iB_j ($i,j = 1,2,3,4,5$) obojene su crvenom ili zelenom bojom tako da u svakom trouglu, koga obrazuju temena prizme, postoje dve strane obojene raznim bojama. Dokazati da su svih deset ivica osnova obojene istom bojom.

(3) U ravni su data dva kruga C_1 i C_2 koji se seku. Neka je A jedna njihova presečna tačka. Iz tačke A, po krugovima C_1 i C_2, istovremeno, počinju da se kreću tačke M_1 i M_2. Tačke se kreću po svojim krugovima konstantnim brzinama ne menjajući smer. Tačke M_1 i M_2 istovremeno obiđu svaka svoj krug i sreću se u tački A. Pokazati da u ravni postoji nepokretna tačka P koja je u svakom trenutku podjednako udaljena od tačaka M_1 i M_2.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141

Utorak, 2. juli 1979. godine

vreme rada: 4 sata

(4) Date su ravan π, tačka P u toj ravni i tačka Q van nje. Odrediti sve tačke R u ravni π za koje je odnos

$(QP + PR)/QR$ maksimalan.

(5) Odrediti sve realne brojeve a za koje postoje nenegativni brojevi x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, koji zadovoljavaju relacije

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3 .$$

(6) Neka su A i E dva naspramna temena pravilnog osmougla. Na temenu A nalazi se žaba. Sa svakog temena osmougla, osim temena E, žaba može skočiti na susedno teme. Kada dospe na teme E žaba ostaje na njemu. Neka je a_n broj načina na koje žaba može sa temena A dospeti na teme E skočivši tačno n puta. Pokazati da je $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$, $n = 1,2,3,\ldots$, gde je $x = 2 + \sqrt{2}$ i $y = 2 - \sqrt{2}$.

(Pod načinom na koji žaba može dospeti sa temena A na teme E skočivši tačno n puta podrazumeva se niz temena $(P_0,\ldots, P_n)$ koji zadovoljava sledeće uslove:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) za svako i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $P_i \neq E$;

(iii) za svako i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i i P_{i+1} su susedna temena osmougla.)