THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Ngày thi thứ nhất : 2-7-1979
Thời gian làm bài : 4 giờ.

I. Cho p và q là những số tự nhiên sao cho
$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$
Chứng minh rằng p chia hết cho 1979.

2. Cho hình lăng trụ mà hai đáy là các ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$ và $B_1B_2B_3B_4B_5$. Mỗi cạnh của hai ngũ giác và mỗi đoạn thẳng A_iB_j với mọi $i, j = 1, \dots, 5$, đều được tô màu đỏ hoặc màu xanh. Mọi tam giác, mà ba đỉnh là đỉnh của hình lăng trụ và ba cạnh được tô màu, đều có hai cạnh được tô màu khác nhau. Chứng minh rằng tất cả mười cạnh của hai đáy hình lăng trụ được tô cùng một màu.

3. Cho hai đường tròn C_1 và C_2 cắt nhau và A là một trong các giao điểm của chúng. Hai điểm M_1 và M_2 chạy cùng một lúc từ A theo thứ tự trên hai đường tròn C_1 và C_2, với vận tốc không đổi và theo cùng một chiều. Sau một vòng cả hai điểm lại trở về A cùng một lúc. Chứng minh rằng tồn tại một điểm cố định P trong mặt phẳng sao cho, ở mọi lúc, các khoảng cách từ P đến hai điểm M_1 và M_2 bằng nhau.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST   Telephone 01-435 7141

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Ngày thi thứ hai : 3 - 7 - 1979

Thời gian làm bài : 4 giờ.

4. Cho một điểm P nằm trong một mặt phẳng π và một điểm Q nằm ngoài mặt phẳng đó. Tìm tất cả những điểm R nằm trong mặt phẳng π sao cho tỉ số $\dfrac{QP + PR}{QR}$ là cực đại.

5. Tìm tất cả những số thực a sao cho tồn tại năm số thực không âm x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 thỏa mãn các hệ thức sau đây :

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3 .$$

6. Cho A và E là hai đỉnh đối tâm của một hình tám cạnh đều lồi. Có một con ếch bắt đầu nhảy từ đỉnh A. Từ bất cứ đỉnh nào của hình tám cạnh, trừ đỉnh E, ếch có thể nhảy một bước tới một trong hai đỉnh kề. Khi ếch nhảy tới đỉnh E thì nó dừng lại và ở lại đó. Gọi a_n là số đường đi phân biệt của đúng n bước nhảy để ếch nhảy từ A đến E. Chứng minh rằng với $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{2n-1} = 0 , \qquad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1} - y^{n-1} \right)$$

trong đó $x = 2 + \sqrt{2}$ và $y = 2 - \sqrt{2}$.

Chú thích:

Một đường đi của n bước nhảy là một dãy các đỉnh $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ sao cho

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$

(ii) với mọi i , $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i là phân biệt với E

(iii) với mọi i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i và P_{i+1} là hai đỉnh kề nhau .

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141