THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

MÅNDAGEN DEN 2 JULI 1979

1. Låt p och q vara sådana naturliga tal att

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bevisa att p är delbart med 1979.

2. Ett prisma med femhörningar $A_1A_2A_3A_4A_5$ och $B_1B_2B_3B_4B_5$ som topp- och bottenytor är givet. Varje sida i de två femhörningarna och varje sträcka A_iB_j, $i, j = 1, \dots, 5$, är färgad med antingen rött eller grönt. Varje triangel, vars hörn är hörn i prismat och vars samtliga sidor är färgade, har två sidor med olika färg. Bevisa att alla tio sidorna i prismats topp- och bottenytor är av samma färg.

3. Två cirklar i planet skär varandra, och A är en av skärningspunkterna. Två punkter startar samtidigt från A och rör sig moturs med konstanta hastigheter utefter varsin cirkel. De två punkterna återvänder samtidigt till A efter att ha fullbordat ett varv. Visa att det finns en fix punkt P i planet så att vid varje tidpunkt avståndet från P till de båda rörliga punkterna är lika.

Tid: 4 timmar.

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

TISDAGEN DEN 3 JULI 1979

4. P är en punkt i ett plan π och Q är en punkt utanför π. Bestäm alla punkter R i π för vilka kvoten

$$(QP + PR)/QR$$

är maximal.

5. Bestäm alla reella tal a för vilka det finns icke-negativa tal x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 som uppfyller relationerna

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a\,, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2 \quad \text{och} \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3\,.$$

6. A och E är motsatta hörn i en regelbunden åttahörning. En känguru börjar hoppa från hörnet A. Från varje hörn i åttahörningen utom E kan den hoppa till ettdera av de två närbelägna hörnen. När den kommer till hörnet E, stannar kängurun. Låt a_n beteckna antalet olika vägar från A till E med exakt n stycken hopp. Bevisa att

$$a_{2n-1} = 0\,, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})\,, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

där $x = 2 + \sqrt{2}$ och $y = 2 - \sqrt{2}$.

Anmärkning: En väg med exakt n hopp är en följd av hörn $(P_0,\ldots,P_n)$ som uppfyller följande villkor:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$,
(ii) för alla i, $0 \le i \le n-1$, är P_i skilt från E,
(iii) för alla i, $0 \le i \le n-1$, är P_i och P_{i+1} närbelägna hörn.

Tid: 4 timmar

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141