THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

3 июля 1979 года, вторник.

Время работы: 4 часа.

(4) Дана плоскость π, точка P на этой плоскости и точка Q вне плоскости π. Найти все точки R в плоскости π, для которых отношение $(QP + PR)/QR$ максимально.

(5) Найти все вещественные числа a, для которых существуют вещественные неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющие соотношениям:

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3 .$$

(6) Пусть A и E - две противоположные вершины правильного восьмиугольника. В вершине A находится кенгуру. Из любой вершины восьмиугольника кроме вершины E кенгуру может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в вершину E, кенгуру останавливается и остается там. Пусть a_n - количество способов, которыми кенгуру может попасть из вершины A в вершину E ровно за n прыжков. Доказать, что

$a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$, $n = 1,2,3,\ldots$

где $x = 2+\sqrt{2}$, $y = 2-\sqrt{2}$.

(Способом попадания из вершины A в вершину E за n прыжков называется последовательность вершин $(P_0, \ldots, P_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $P_0 = A$,
2) $P_n = E$,
3) для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $P_i \neq E$,
4) для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i и P_{i+1} - соседние вершины многоугольника.)

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141