THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

MAANDAG 2 juli 1979

Beschikbare tijd: 4 uren

1. Gegeven zijn positieve gehele getallen p en q zo, dat

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} .$$

Bewijs dat p deelbaar is door 1979.

2. Gegeven is een prisma met de vijfhoeken $A_1A_2A_3A_4A_5$ en $B_1B_2B_3B_4B_5$ als boven- en ondervlak. Elke zijde van elk van de twee vijfhoeken en elk van de lijnstukken A_iB_j voor $i,j = 1,\ldots,5$ is rood of groen gekleurd. Elke driehoek waarvan de hoekpunten ook hoekpunten zijn van het prisma en waarvan de zijden alledrie gekleurd zijn, heeft twee zijden van verschillende kleur.
Toon aan dat alle 10 zijden van boven- en ondervlak dezelfde kleur hebben.

3. In het vlak liggen twee elkaar snijdende cirkels C_1 en C_2.
A is een van de snijpunten. Twee punten P_1 en P_2 doorlopen de cirkels C_1 resp. C_2 in dezelfde omloopszin met constante snelheden. Zij beginnen tegelijkertijd in A en komen na één omloop ook weer gelijktijdig in A terug.
Bewijs dat er een vast punt P in het vlak is zo, dat P op elk tijdstip gelijke afstanden heeft tot P_1 en P_2.

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

DINSDAG 3 juli 1979

Beschikbare tijd: 4 uren

4. Gegeven zijn een punt P in een vlak π en een punt Q niet in π. Bepaal alle punten R in π waarvoor het quotient $\frac{PQ + PR}{QR}$ maximaal is.

5. Bepaal alle reële getallen a waarvoor er niet-negatieve reële getallen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 bestaan die voldoen aan de voorwaarden

$$\sum_{k=1}^{5} k\, x_k = a \quad , \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2 \quad , \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3 \quad .$$

6. A en E zijn diametraal tegenover elkaar liggende hoekpunten van een regelmatige achthoek. Een pion legt een weg af langs de hoekpunten van de achthoek. Hierbij kan hij telkens van een hoekpunt naar één van de twee aangrenzende hoekpunten springen. Elke weg begint in A en eindigt zodra de pion voor het eerst E bereikt. Het aantal verschillende wegen van precies n sprongen geeft men aan door a_n. Bewijs dat voor elke k = 1, 2, 3, ...

$$a_{2k-1} = 0 \ , \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{k-1} - y^{k-1} \right) \ , \text{ waarbij } x = 2 + \sqrt{2},\ y = 2 - \sqrt{2} \ .$$

<u>N.B.</u>: een "weg van precies n sprongen" is een rij hoekpunten $(P_0,\ldots,P_n)$ zo, dat: (i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) voor iedere i, $0 \leq i \leq n-1$, is P_i verschillend van E;

(iii) voor iedere i, $0 \leq i \leq n-1$, zijn P_i en P_{i+1} aangrenzende hoekpunten.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141