THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Hétfő, 1979. július 2.

Munkaidő: 4 óra.

(1) Legyenek p és q olyan természetes számok, amelyekre fennáll, hogy

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Bizonyitsa be, hogy p osztható 1979-cel.

(2) Adva van egy ötoldalú hasáb: alaplapja az $A_1A_2A_3A_4A_5$, fedőlapja pedig a $B_1B_2B_3B_4B_5$ ötszög. E két ötszög mindegyik oldalát, továbbá valamennyi A_iB_j szakaszt $(i,j = 1, 2, \dots, 5)$ vörösre vagy zöldre szinezzük. Minden olyan háromszögnek, amelynek csúcsai egyúttal a hasáb csúcspontjai is, és amelynek mindegyik oldala szinezett, van két különböző szinű oldala.

Mutassa meg, hogy ekkor az alaplapnak és a fedőlapnak összesen tiz oldala mind egyforma szinű.

(3) Adva van a sikban két egymást metsző körvonal: k_1 és k_2. Jelölje A a két metszéspont egyikét. Két tömegpont: P_1 és P_2 mozog k_1-en, illetve k_2-n állandó sebességgel ugyanabban a forgási irányban. Mozgásukat egy időben kezdik az A pontban és egy-egy körüljárás után ismét egyidejűleg érkeznek az A pontba.

Bizonyitsa be, hogy van a sikban olyan rögzitett P pont, amelyre a mozgás minden időpontjában érvényes a

$$PP_1 = PP_2$$

egyenlőség.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Kedd, 1979. július 3.

Munkaidő: 4 óra.

(4) Adva van a π síkban egy P és a π síkon kívül egy Q pont. Határozza meg a π síknak valamennyi olyan R pontját, amelyre a

$$\frac{QP + PR}{QR}$$

hányados értéke maximális.

(5) Határozza meg az összes a valós számot, amelyekhez léteznek a

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3$$

egyenlőségeket kielégítő x_1, x_2, x_3, x_4 és x_5 nem-negatív valós számok.

(6) Legyen A és E egy szabályos nyolcszög két átellenes csúcsa. Egy béka az A csúcsból kiindulva kezd ugrálni. A nyolcszög bármely csúcsából – az E-t kivéve – a mellette levő egyik csúcsba ugorhat. Ha az E csúcsba ér, akkor megáll és ott marad.
Legyen a_n a pontosan n ugrásból álló különböző utak száma.
Bizonyítsa be, hogy $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$,
ahol $x = 2 + \sqrt{2}$ és $y = 2 - \sqrt{2}$.

X Megjegyzés: Egy pontosan n ugrásból álló út a csúcsoknak olyan $P_0, P_1, \ldots, P_n$ sorozata, amely eleget tesz az alábbi feltételeknek:

I. $P_0 = A$, $P_n = E$;

II. minden, a $0 \leq i \leq n-1$ egyenlőtlenséget kielégítő i-re P_i különbözik E-től;

III. minden, a $0 \leq i \leq n-1$ egyenlőtlenséget kielégítő i-re P_i és P_{i+1} szomszédos csúcsok.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141