XXI ΔΙΕΘΝΗΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΛΟΝΔΙΝΟ 1979

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΛΙΟΥ 1979

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 4 ΩΡΕΣ.

(1) Ἔστω ὅτι p καὶ q εἶναι δύο φυσικοὶ ἀριθμοὶ τέτοιοι, ὥστε

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ὁ p διαιρεῖται μὲ τὸ 1979

(2) Δίνεται ἕνα πρῖσμα μὲ βάσεις τὰ πεντάγωνα $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ καὶ $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$. Κάθε πλευρὰ τῶν δύο πενταγώνων καὶ κάθε εὐθεῖα $A_i B_j$ γιὰ ὅλα τὰ $i, j = 1, \ldots, 5$, ἔχει χρωματιστεῖ ἢ μὲ κόκκινο ἢ μὲ πράσινο χρῶμα. Κάθε τρίγωνο, τοῦ ὁποίου οἱ κορυφὲς εἶναι καὶ κορυφὲς τοῦ πρίσματος καὶ τοῦ ὁποίου οἱ πλευρὲς ἔχουν ὅλες χρωματιστεῖ, ἔχει δύο πλευρὲς μὲ διαφορετικὸ χρῶμα. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι καὶ οἱ 10 πλευρὲς τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος ἔχουν τὸ ἴδιο χρῶμα.

(3) Δύο κύκλοι ἑνὸς ἐπιπέδου τέμνονται. Ἔστω A ἕνα ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν περιφερειῶν τῶν δύο κύκλων. Δύο σημεῖα κινοῦνται μὲ σταθερὲς ταχύτητες ἀρχίζοντας ταυτόχρονα ἀπὸ τὸ σημεῖο A καὶ κάθε σημεῖο κινεῖται πάνω στὴν δική του περιφέρεια καὶ κατὰ τὴν αὐτὴ φορά. Τὰ δύο σημεῖα ἐπιστρέφουν στὸ A ταυτόχρονα μετὰ ἀπὸ μιὰ περιστροφή. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι ὑπάρχει ἕνα σταθερὸ σημεῖο P τοῦ ἐπιπέδου τέτοιο, ὥστε σὲ ὁποιαδήποτε στιγμὴ οἱ ἀποστάσεις τῶν κινουμένων σημείων ἀπὸ τὸ σημεῖο P νὰ εἶναι ἴσες.

XXI ΔΙΕΘΝΗΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΛΟΝΔΙΝΟ 1979
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 1979
ΔΙΑΡΚΕΙΑ 4 ΩΡΕΣ

(4) Δίνεται ἕνα ἐπίπεδο Π, ἕνα σημεῖο P τοῦ Π καί ἕνα σημεῖο Q ἔξω ἀπό τό Π. Νά βρεῖτε ὅλα τά σημεῖα R τοῦ Π γιά τά ὁποῖα ὁ λόγος $\dfrac{QP+PR}{QR}$ εἶναι ἕνα μέγιστο.

(5) Νά βρεῖτε ὅλους τούς πραγματικούς ἀριθμούς a γιά τούς ὁποίους ὑπάρχουν μή ἀρνητικοί ἀριθμοί x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 πού ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις

$$\sum_{k=1}^{5} k x_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3.$$

(6) Ἔστω ὅτι A καί E εἶναι δύο ἀπέναντι κορυφές ἑνός κανονικοῦ ὀκταγώνου. Ἕνας βάτραχος ἀρχίζει νά πηδᾶ ἀπό τήν κορυφή A. Ἀπό κάθε κορυφή τοῦ ὀκταγώνου ἐκτός τῆς E, ὁ βάτραχος μπορεῖ νά πηδᾶ σέ μία ὁποιαδήποτε ἀπό τίς δύο διαδοχικές της κορυφές. Ὅταν ὁ βάτραχος φθάσει στή κορυφή E σταματᾶ καί κάθεται ἐκεῖ. Ἔστω ὅτι a_n εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν διαφορετικῶν διαδρομῶν τῶν n ἀκριβῶς πηδημάτων, τά ὁποῖα τελειώνουν στήν E. Νά ἀποδείξετε ὅτι:

$$a_{2n-1} = 0, \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{n-1} - y^{n-1}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ὅπου $x = 2+\sqrt{2}$ καί $y = 2-\sqrt{2}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Μιά διαδρομή τῶν n πηδημάτων εἶναι μιά ἀκολουθία κορυφῶν $(P_0, \dots, P_n)$ τέτοιων, ὥστε:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$.

(ii) Γιά κάθε i, $0 \le i \le n-1$, P_i εἶναι διαφορετική ἀπό τήν E.

(iii) Γιά κάθε i, $0 \le i \le n-1$, P_i καί P_{i+1} εἶναι διαδοχικές.