THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Montag, 2. Juli 1979

Arbeitszeit: 4 Stunden

1) Seien p und q natürliche Zahlen, sodass

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

gilt.

Man beweise, dass p durch 1979 teilbar ist.

2) Gegeben sei ein Prisma mit den Fünfecken $A_1A_2A_3A_4A_5$ bzw. $B_1B_2B_3B_4B_5$ als Grund- bzw. Deckfläche. Jede Seite der beiden Fünfecke sowie jede Verbindungsstrecke A_iB_j für alle $i,j = 1,2,\dots,5$, sei entweder rot oder grün gefärbt. Jedes Dreieck, dessen Ecken Eckpunkte des Prismas sind, und dessen drei Seiten gefärbt sind, hat zwei Seiten verschiedener Farbe.

Man zeige, dass alle 10 Seiten der Grund- und Deckfläche die gleiche Farbe erhalten.

3) In der Ebene seien zwei sich schneidende Kreislinien k_1, k_2 gegeben. A sei einer der beiden Schnittpunkte.

Zwei Massenpunkte P_1 bzw. P_2 bewegen sich mit konstanten Geschwindigkeiten im gleichen Drehsinn auf k_1 bzw. k_2. Sie beginnen gleichzeitig in A und treffen nach einem Umlauf wieder gleichzeitig in A ein.

Man zeige, dass es einen festen Punkt P in der Ebene gibt, für den in jedem Zeitpunkt der Bewegung gilt:

$$\overline{PP_1} = \overline{PP_2}$$

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Dienstag, 3. Juli 1979

Arbeitszeit: 4 Stunden

4) Gegeben seien ein Punkt P in der Ebene π und ein Punkt Q ausser - halb der Ebene π .
Bestimme alle Punkte R der Ebene π , für die der Quotient

$$\frac{\overline{QP} + \overline{PR}}{\overline{QR}}$$ ein Maximum ist.

5) Man bestimme alle reellen Zahlen a , für die es nicht negative reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 gibt, die den Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{5} ix_i = a \ , \quad \sum_{i=1}^{5} i^3 x_i = a^2 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{5} i^5 x_i = a^3$$ genügen.

6) Es seien A und E zwei gegenüberliegende Eckpunkte eines regulären 8-Ecks. In A sitzt ein Frosch. Von jeder Ecke des 8-Ecks, mit Ausnahme von E, darf er jeweils zu einer der beiden Nachbarecken hüpfen. Sobald er die Ecke E erreicht hat, bleibt er dort sitzen. Es sei a_n die Anzahl der unterscheidbaren Wege, die Ecke E von der Ecke A aus in genau n Sprüngen zu erreichen.
Beweise, dass für n=1,2,3,... gilt :

$$a_{2n-1} = 0 \ , \quad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x^{n-1} - y^{n-1}) \ ,$$

wobei $x = 2 + \sqrt{2}$ und $y = 2 - \sqrt{2}$ ist.
Bemerkung:
Ein Weg aus n Sprüngen ist eine Folge $(P_o, P_1, \dots, P_n)$ von Eckpunkten, sodass:
(i) $P_o = A$, $P_n = E$
(ii) für alle i mit $0 \leqq i \leqq n-1$ ist P_i von E verschieden
(iii) für alle i mit $0 \leqq i \leqq n-1$ sind P_i und P_{i+1} benachbarte Eckpunkte.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141