THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

MAANANTAI, 2. HEINÄKUUTA 1979

Koeaika neljä tuntia

1. Olkoot p ja q luonnollisia lukuja, joille pätee

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Todista, että p on jaollinen 1979:llä.

2. On annettu suuntaissärmiö, jonka pohjina ovat viisikulmiot $A_1A_2A_3A_4A_5$ ja $B_1B_2B_3B_4B_5$. Viisikulmioiden kaikki sivut ja kaikki janat A_iB_j, i, j = 1, 2, ..., 5, on väritetty joko punaisiksi tai vihreiksi. Jokaisessa kolmiossa, jonka kärjet ovat suuntaissärmion kärkiä ja jonka sivut ovat väritettyjä, on kaksi eriväristä sivua. Osoita, että pohjaviisikulmioiden kaikki kymmenen sivua ovat samanväriset.

3. Kaksi tason ympyrää leikkaavat toisensa. Olkoon toinen leikkauspisteistä A. Pisteestä A lähtee samalla hetkellä liikkumaan kumpaakin ympyrää pitkin piste tasaisella nopeudella samaan kiertosuuntaan. Pisteet palaavat yhden kierroksen jälkeen samanaikaisesti A:han. Todista, että tasossa on kiinteä piste P, jonka etäisyys molemmista liikkuvista pisteistä on joka hetki sama.

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

TIISTAI, 3. HEINÄKUUTA 1979

Koeaika neljä tuntia

4. Olkoon piste P tasossa π ja Q π:n ulkopuolella. Määritä kaikki tason π pisteet R, joille suhde

$$\frac{|QP| + |PR|}{|QR|}$$

saa maksimiarvon.

5. Määritä kaikki reaaliluvut a, joille on olemassa ei-negatiiviset reaaliluvut x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 siten, että

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

6. Olkoot A ja E säännöllisen kahdeksankulmion vastakkaisia kärkiä. Kärjestä A lähtee hyppimään sammakko. Se voi hypätä jokaisesta kahdeksankulmion kärjesta paitsi E:stä jompaankumpaan viereiseen kärkeen. Saavuttuaan E:hen sammakko pysähtyy. Olkoon a_n tasan n:stä hypystä muodostuvien A:sta E:hen johtavien polkujen lukumäärä. Todista, että $a_{2n-1} = 0$, $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, missä $x = 2 + \sqrt{2}$ ja $y = 2 - \sqrt{2}$.

Huom. n:stä hypystä muodostuva polku on jono $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ kärkipisteitä, jolle on voimassa

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) $P_i \neq E$ kaikilla i, $0 \leq i \leq n-1$;

(iii) P_i ja P_{i+1} ovat vierekkäisiä kärkiä kaikilla i, $0 \leq i \leq n-1$.