THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Pondelok 2. júla 1979
(Na prácu sú 4 hodiny času)

1. Nech p a q sú prirodzené čísla také, že

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Dokážte, že p je deliteľné číslom 1979.

2. Je daný päťboký hranol so základňami $A_1A_2A_3A_4A_5$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$. Všetky hrany oboch základní a všetky úsečky A_jB_k, $1 \leqq j \leqq 5$, $1 \leqq k \leqq 5$ zafarbíme červenou alebo zelenou farbou tak, aby v každom trojuholníku, ktorého vrcholy sú vrcholmi hranola a ktorého všetky strany boli zafarbené, existovala dvojica strán rôznej farby. Dokážte, že všetkých desať hrán oboch základní musí byť rovnakej farby.

3. V rovine sú dané dve pretínajúce sa kružnice k_1 a k_2. Označme A jeden z ich priesečníkov. Po kružnici k_1, resp. k_2 sa pohybujú body B_1, resp. B_2 v rovnakom zmysle konštantnou rýchlosťou tak, že sa pri každom obehu stretávajú v bode A.
Dokážte, že v rovine existuje pevný bod P, pre ktorý v každom okamžiku platí $PB_1 = PB_2$.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Utorok 3. júla 1979
(Na prácu sú 4 hodiny času)

4. Je daná rovina π, bod $P \in \pi$ a bod $Q \notin \pi$. Určte všetky body $R \in \pi$, pre ktoré je podiel

$$\frac{PQ + PR}{QR}$$

maximálny.

5. Nájdite všetky reálne čísla b, pre ktoré existujú nezáporné reálne čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 tak, že platí

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = b, \quad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = b^2, \quad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = b^3.$$

6. Po vrcholoch pravidelného osemuholníka ABCDEFGH skáče klokan. Každým svojím skokom sa premiestňuje z jedného vrcholu do niektorého z oboch susedných vrcholov. Začína v A a zastaví sa v okamžiku, keď sa dostane do E.

Označme a_n počet všetkých rôznych ciest z A do E pozostávajúcich z práve n skokov. Dokážte, že pre všetky $k = 1,2,3,\ldots$ platí

$$a_{2k-1} = 0, \qquad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x^{k-1} - y^{k-1}\right),$$

kde $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$.

Poznámka: Pod cestou z A do E pozostávajúcou z práve n skokov rozumieme postupnosť $P_0, P_1, \ldots, P_n$ vrcholov osemuholníka s týmito vlastnosťami:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) $P_j \neq E$ pre všetky $j = 1,2,\ldots,n-1$;

(iii) P_i a P_{i+1} sú dva susedné vrcholy osemuholníka.