THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Pondělí, 2. července 1979

(Na práci jsou 4 hodiny času)

1. Nechť p a q jsou přirozená čísla taková, že

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319} .$$

Dokažte, že p je dělitelné číslem 1979 .

2. Je dán pětiboký hranol se základnami $A_1A_2A_3A_4A_5$ a $B_1B_2B_3B_4B_5$. Všechny hrany obou základen a všechny úsečky A_jB_k , $1 \leqq j \leqq 5$, $1 \leqq k \leqq 5$; obarvíme červenou nebo zelenou barvou tak, aby v každém trojúhelníku, jehož vrcholy jsou vrcholy hranolu a jehož všechny strany byly obarveny, existovala dvojice stran různych barev. Dokažte, že všech deset hran obou základen musí mít stejnou barvu.

3. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1 a k_2 . Označme A jeden z jejich průsečíků. Po kružnici k_1, resp. k_2 se pohybují body B_1 , resp. B_2 ve stejném smyslu konstantní rychlostí tak, že se při každém oběhu setkávají v bodě A .
Dokažte, že v rovině existuje pevný bod P , pro který v každém okamžiku platí $PB_1 = PB_2$.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

Úterý, 3. července 1979

(Na práci jsou 4 hodiny času)

4. Je dána rovina π, bod $P \in \pi$ a bod $Q \notin \pi$. Najděte všechny body $R \in \pi$, pro něž je podíl

$$\frac{PQ + PR}{QR}$$

maximální.

5. Nalezněte všechna reálna čísla b, pro něž existují nezáporná reálná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 taková, že platí

$$\sum_{k=1}^{5} k x_k = b , \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = b^2, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = b^3 .$$

6. Po vrcholech pravidelného osmiúhelníka ABCDEFGH skáče klokan. Každým skokem se přemisťuje z jednoho vrcholu do některého z obou sousedních; začíná v A a zastaví se, jakmile se poprvé dostane do E.
Označme a_n počet všech různých cest z A do E složených z právě n skoků. Dokažte, že pro všechna $k = 1, 2, 3, \ldots$ platí

$$a_{2k-1} = 0 , \qquad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{k-1} - y^{k-1}) ,$$

kde

$$x = 2 + \sqrt{2} , \qquad y = 2 - \sqrt{2} .$$

Poznámka. Cestou z A do E složenou z právě n skoků rozumíme posloupnost $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ vrcholů osmiúhelníka s těmito vlastnostmi:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n-1$ je $P_j \neq E$;

(iii) pro každé $j = 0, 1, \ldots, n-1$ jsou P_j a P_{j+1} dva sousední vrcholy osmiúhelníka.

SMP Westfield College, Kidderpore Avenue, Hampstead, London NW3 7ST Telephone 01-435 7141