

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

LUNES, 2 DE JULIO DE 1979

PRIMER DIA DE COMPETENCIA (SE DISPONE DE 4 HORAS EXACTAMENTE)

1. Sean p y q dos números enteros positivos, tales que,

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

Pruebe que entonces p es múltiplo de 1979.

2. Considere un prisma cuyas bases son dos pentágonos $A_1A_2A_3A_4A_5$ y $B_1B_2B_3B_4B_5$. Cada uno de los lados de estos pentágonos y cada uno de los segmentos $\overline{A_iB_j}$ (con $1 \leq i \leq 5$ y $1 \leq j \leq 5$) está coloreado de rojo o de verde. Se sabe que en cada triángulo cuyos vértices sean vértices del prisma y cuyos lados estén todos coloreados, hay siempre dos lados de colores diferentes.

Pruebe que entonces las diez aristas de las bases del prisma tienen todas el mismo color.

3. En un plano se dan dos circunferencias secantes. Sea A uno de sus puntos de intersección. Partiendo simultáneamente de A , dos puntos comienzan a moverse con velocidades constantes, cada uno de ellos sobre su propia circunferencia y ambos en el mismo sentido. Se sabe que ambos puntos retornan a A en el mismo instante luego de realizar una vuelta completa a sus respectivas circunferencias. Pruebe que en ese plano existe un punto fijo P , tal que, en todo instante, P equidista de ambos puntos móviles.