THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

SEGUNDA-FEIRA 2 DE JULHO DE 1979

Tempo - 4 horas

(1) Sejam p e q números inteiros estritamente positivos tais que:

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Mostre que 1979 divide p.

(2) Considere um prisma cujas bases são os pentágonos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Cada um dos lados destes pentágonos bem como cada um dos segmentos A_iB_j (com $1 \leq i \leq 5$ e $1 \leq j \leq 5$) esta pintado ou de azul ou de vermelho. Sabe-se que cada triângulo cujos três vértices são vértices do prisma e cujos três lados foram pintados tem sempre dois lados pintados com cores diferentes. Mostre que as dez arestas das bases do prisma estão pintadas com a mesma cor.

(3) São dadas duas circunferências C_1 e C_2 coplanares e secantes; A é um dos pontos de intersecção destas circunferências. Os pontos M_1 e M_2 percorrem respectivamente C_1 e C_2, no mesmo sentido, cada qual com velocidade constante. A cada volta os pontos M_1 e M_2 passam simultaneamente pelo ponto A. Mostre que existe um ponto fixo P, do plano, que é constantemente eqüidistante de M_1 e M_2.

THE XXI INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
LONDON 1979

TERCA-FEIRA 3 DE JULHO DE 1979

Tempo - 4 horas

(4) São dados um plano Π, um ponto P que pertence a Π, e um ponto Q que não pertence a Π.

Determine todos os pontos R do plano, tais que o quociente (QP + PR)/QR seja máximo.

(5) Determine todos os valores reais de a para os quais existem cinco reais positivos ou nulos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 que verificam as condiçoẽs seguintes: $\sum_{k=1}^{5} kx_k = a$, $\sum_{k=1}^{5} k^3 x_k = a^2$, $\sum_{k=1}^{5} k^5 x_k = a^3$

(6) Sejam A e E dois vértices diametralmente opostos de um octógono regular convexo. Um peão, que pode ocupar cada um dos oito vértices do octógono, se desloca, a cada lance, de um vértice a um dos dois vértices adjacentes; o peão parte de A e o jogo acaba quando o peão atinge, pela primeira vez, o ponto E.

Designamos por a_n o numero de 'partidas' distintas, de exatamente de n lances, terminando em E. Para todo k, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{k-1} - y^{k-1})$$

com : $x = 2 + \sqrt{2}$ e $y = 2 - \sqrt{2}$.

(Uma 'partida' de n lances é uma seqüência de vértices $(P_0, \ldots, P_n)$ que satisfaz as seguintes condiçoẽs:

(i) $P_0 = A$, $P_n = E$;

(ii) Para todo i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i é distinto de E;

(iii) Para todo i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i e P_{i+1} são vértices adjacentes.