Internationale Wiskunde Wedstrijd, Mersch, Luxemburg 1980

Eerste dag

donderdag, 10 juli 1980
beschikbare tijd: 4 uur

1. Bepaal alle functies f van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{Q}$ die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:
   (1) $f(1) = 2$,
   (2) $f(xy) = f(x).f(y) - f(x + y) + 1$ voor alle x en y uit $\mathbb{Q}$
   ($\mathbb{Q}$ is de verzameling van alle rationale getallen).

2. Op een lijn liggen de punten A, B en C met B tussen A en C. Aan een zelfde kant van de lijn AC beschrijft men drie halve cirkels met middellijnen AB, BC en AC.
   De gemeenschappelijke raaklijn in B aan de eerste twee halve cirkels snijdt de derde in E.
   De raakpunten van de andere gemeenschappelijke raaklijn aan de eerste twee halve cirkels noemt men U en V.
   Bepaal de verhouding $\dfrac{\text{opp. } \Delta \text{ EUV}}{\text{opp. } \Delta \text{ EAC}}$ als functie van $r_1 = \frac{1}{2}AB$ en $r_2 = \frac{1}{2}BC$.

3. Gegeven zijn een priemgetal p en een positief geheel getal n. Bewijs dat de volgende twee beweringen equivalent zijn:
   (1) Geen van de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n}{k}$ met $k = 0,1,\dots,n$ is deelbaar door p.
   (2) n kan geschreven worden in de vorm $n = p^s q - 1$, s en q gehele getallen, $s \geq 0$, $0 < q < p$.

Internationale Wiskunde Wedstrijd, Mersch, Luxemburg 1980

Tweede dag

vrijdag, 11 juli 1980
beschikbare tijd: 4 uur

4. Gegeven zijn twee cirkels, die elkaar (inwendig of uitwendig) raken in een punt P.
Een lijn die één der cirkels in een punt A raakt, snijdt de andere cirkel in B en C.
Toon aan dat de lijn PA bissectrice is van één der hoeken gevormd door de lijnen BP en PC.

5. Tien spelers begonnen te spelen, ieder met hetzelfde geldbedrag.
Om beurten wierpen zij vijf dobbelstenen. Wanneer een speler bij een worp n ogen gooide, betaalde hij aan elk van zijn medespelers een bedrag, gelijk aan $\frac{1}{n}$ maal het bedrag dat die medespeler op dat moment bezat.
Zij wierpen en betaalden om de beurt.
Bij de 10e worp werden er 12 ogen gegooid, en na betalen bleek iedere speler precies evenveel geld te hebben als bij het begin van het spel.
Bepaal, indien mogelijk, voor elk van de negen voorafgaande worpen het totale aantal ogen.

6. Bepaal alle paren gehele getallen (x,y) die voldoen aan de vergelijking:

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$